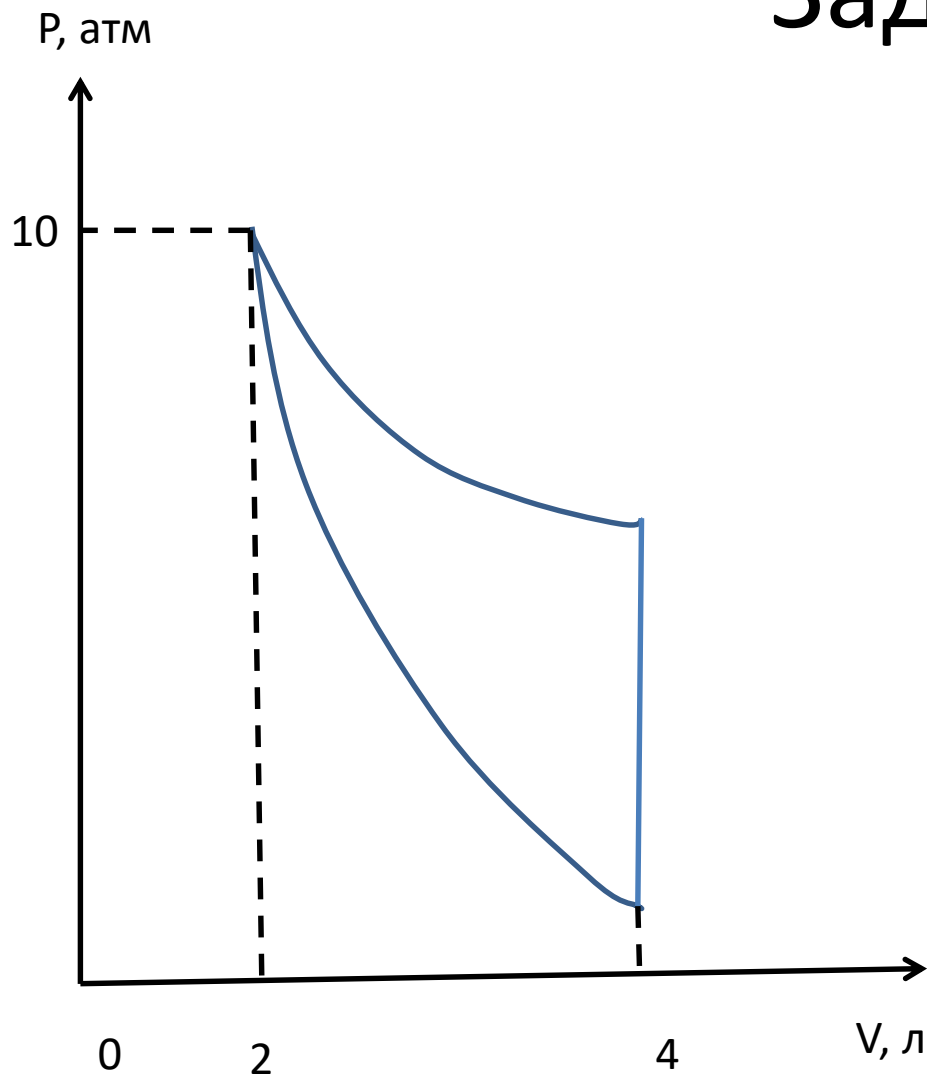


Расчёт КПД теплового двигателя

Задача



Найти КПД цикла, изображённого на рисунке. Рабочий газ – Азот.

Ликбез

Как найти изменение внутренней энергии и работу для различных процессов.

Изменение внутренней энергии.

Внутренняя энергия не зависит от вида процесса и определяется только начальными и конечными условиями.

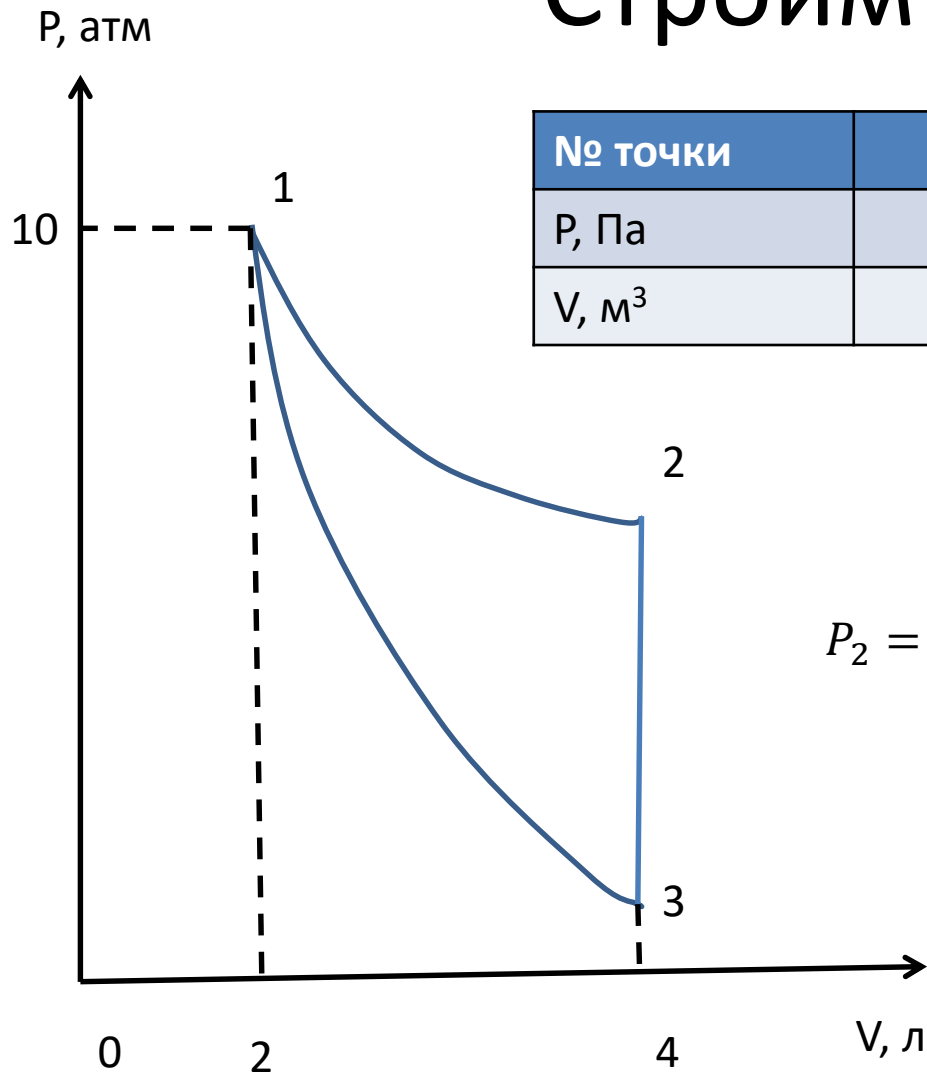
$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} \Delta(PV)$$

Ликбез Работа

Работа зависит от вида процесса и её в каждом случае надо искать отдельно.

Процесс	$V=\text{const}$ (Изохорный)	$P=\text{const}$ (Изобарный)	$T=\text{const}$ (Изотермический)	$Q=0$ (Адиабатный)
Через P и V	0	$p\Delta V$	$pV \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$A = -\Delta U$
Через T	0	$\nu R\Delta T$	$\nu RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	

Строим таблицу

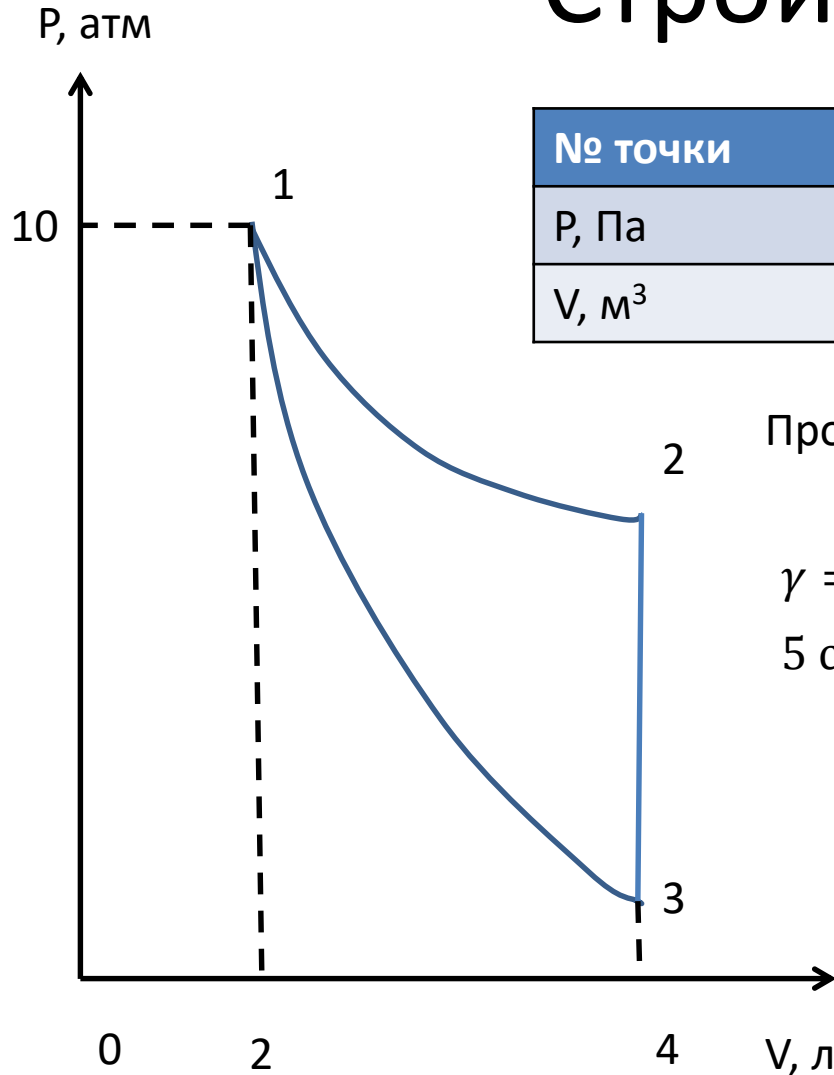


№ точки	1	2	3
$P, \text{Па}$	$10 \bullet 10^5$	$5 \bullet 10^5$	
$V, \text{м}^3$	$2 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$

Процесс 1-2 -изотермический

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$
$$P_2 = \frac{V_1}{V_2} P_1 = \frac{2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} \times 10 \times 10^5 = 5 \times 10^5 \text{ Па}$$

Строим таблицу



№ точки	1	2	3
P, Па	$10 \bullet 10^5$	$5 \bullet 10^5$	$3,8 \bullet 10^5$
V, м ³	$2 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$

Процесс 1-3 – адиабатный

$$PV^\gamma = \text{const}$$

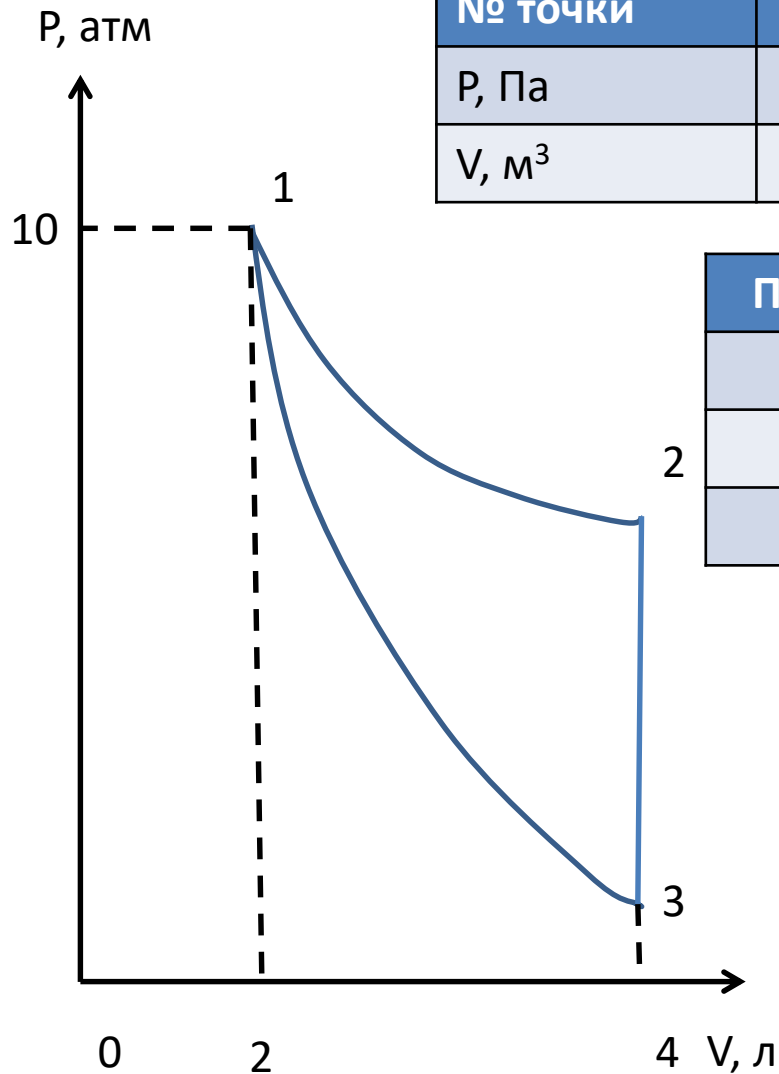
$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}$, т.к. азот двухатомный газ и у него 5 степеней свободы $i = 5$

$$P_1 V_1^{\frac{7}{5}} = P_3 V_3^{\frac{7}{5}}$$

$$P_3 = \left(\frac{V_1}{V_3} \right)^{\frac{7}{5}} P_1 = \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} \right)^{\frac{7}{5}} \times 10 \times 10^5 = 3,8 \times 10^5 \text{ Па}$$

Строим таблицу № 2

№ точки	1	2	3
P, Па	$10 \bullet 10^5$	$5 \bullet 10^5$	$3,8 \bullet 10^5$
V, м ³	$2 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$



Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	1386	0	1386
2-3			
3-1			

Процесс 1-2 – Изотермический

$$\Delta U = 0$$

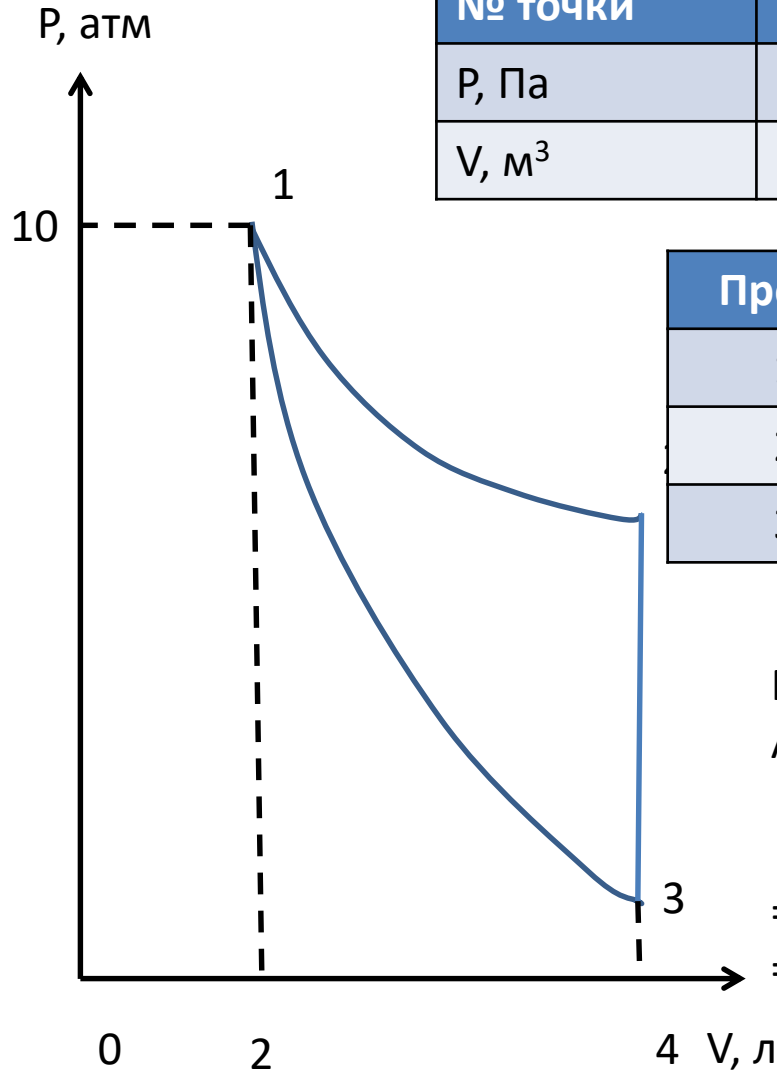
$A = PV \ln(V_2/V_1)$, P и V берём в любой, но одной точке, например, в первой

$$A = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 10 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} \times \ln(2) = 2000 \times 0,693 = 1386 \text{ Дж}$$

$$Q = A + \Delta U = 1386 + 0 = 1396 \text{ Дж}$$

Строим таблицу № 2

№ точки	1	2	3
P, Па	$10 \bullet 10^5$	$5 \bullet 10^5$	$3,8 \bullet 10^5$
V, м ³	$2 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$



Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	1386	0	1386
2-3	0	-1200	-1200
3-1			

Процесс 2-3 – Изохорный
A=0

$$\Delta U = \frac{5}{2} (P_3 V_3 - P_2 V_2) =$$

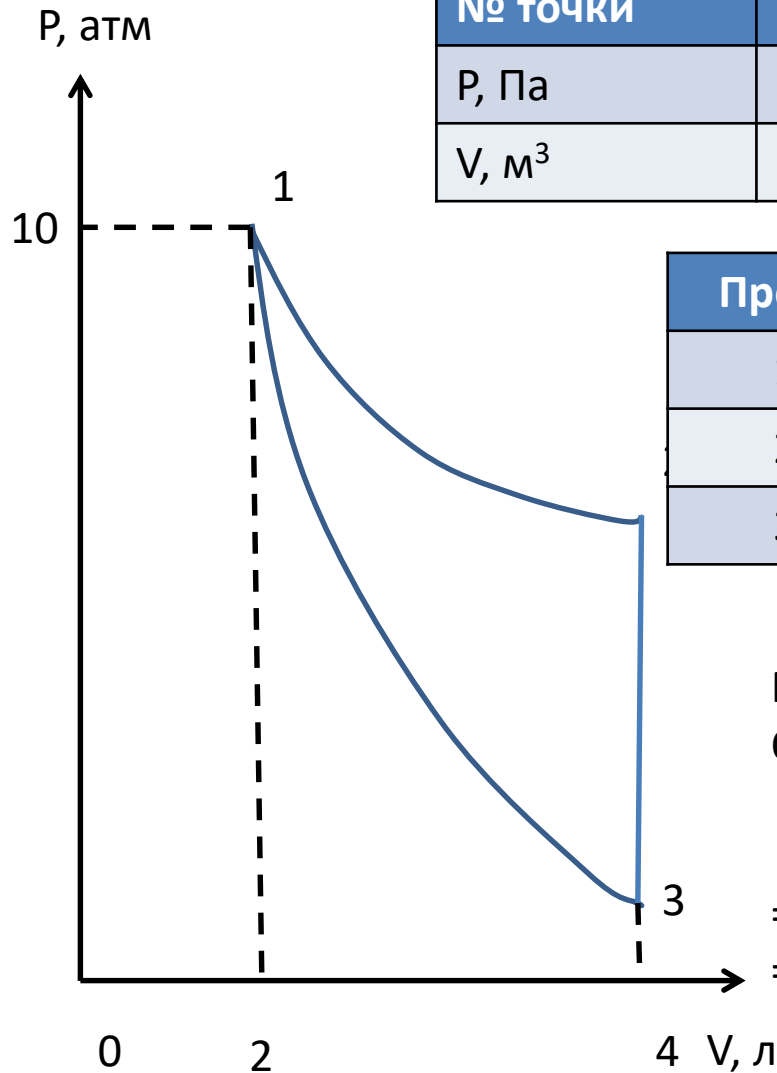
$$= 2,5 (3,8 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-3} - 5 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-3}) =$$

$$= -1200$$

$$Q = A + \Delta U = 0 - 1200 = -1200 \text{ Дж}$$

Строим таблицу № 2

№ точки	1	2	3
P, Па	$10 \bullet 10^5$	$5 \bullet 10^5$	$3,8 \bullet 10^5$
V, м ³	$2 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$



Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	1386	0	1386
2-3	0	-1200	-1200
3-1	-1200	1200	Q

Процесс 3-1 –Адиабатный
Q=0

$$\Delta U = \frac{5}{2} (P_1 V_1 - P_3 V_3) =$$

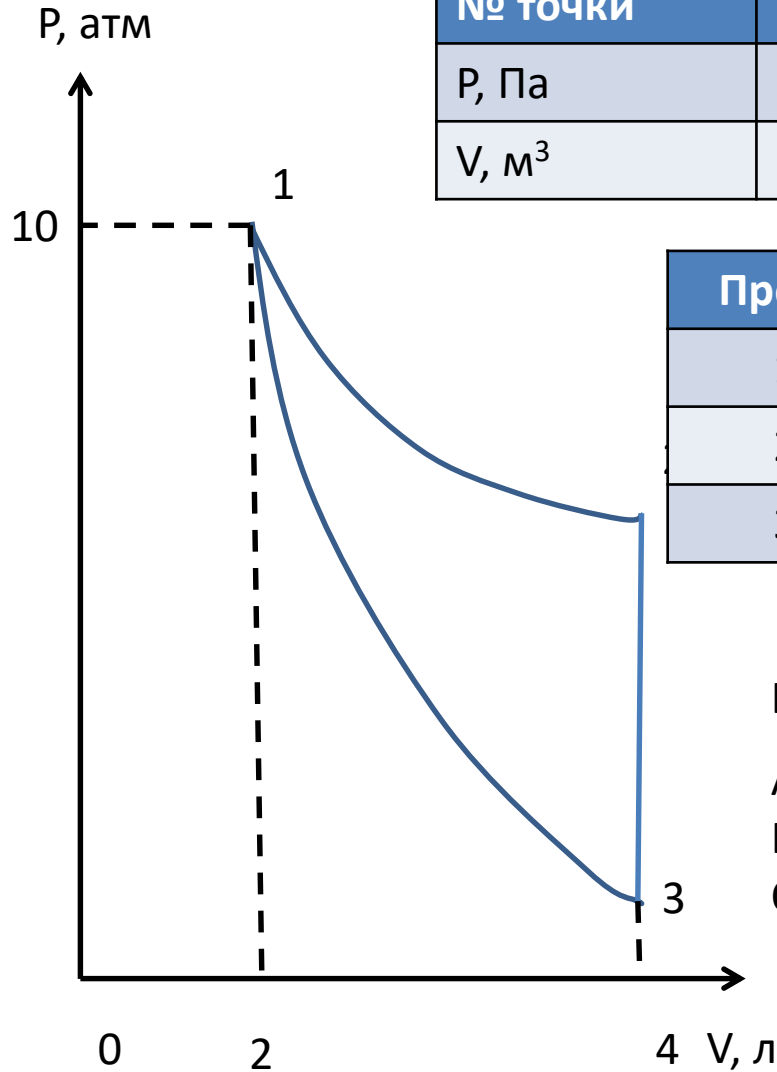
$$= 2,5 (10 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} - 3,8 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-3}) =$$

$$= 1200$$

$$A = -\Delta U = -1200 = -1200 \text{ Дж}$$

Считаем КПД

№ точки	1	2	3
P, Па	$10 \bullet 10^5$	$5 \bullet 10^5$	$3,8 \bullet 10^5$
V, м ³	$2 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$



Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	1386	0	1386
2-3	0	-1200	-1200
3-1	-1200	1200	Q

КПД тепловой машины $\eta = \frac{A}{Q_{\text{нагревателя}}}$

$$A = 1386 + 0 - 1200 = 186 \text{ Дж}$$

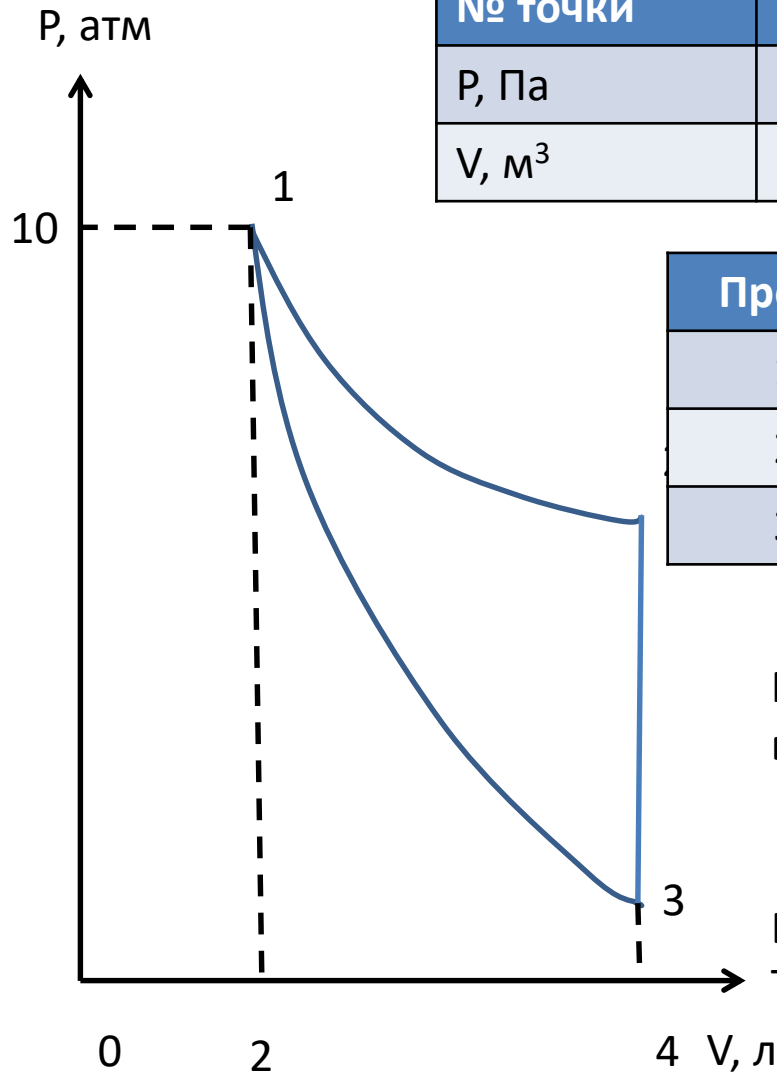
Нагревателем являются те процессы, где $Q > 0$

$$Q_{\text{нагр}} = 1386$$

$$\eta = \frac{186}{1386} = 0,13 = 13\%$$

Сравним КПД с максимальным

№ точки	1	2	3
P, Па	$10 \bullet 10^5$	$5 \bullet 10^5$	$3,8 \bullet 10^5$
V, м ³	$2 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$



Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	1386	0	1386
2-3	0	-1200	-1200
3-1	-1200	1200	Q

Максимально возможный КПД тепловой машины в данном диапазоне температур – КПД машины Карно

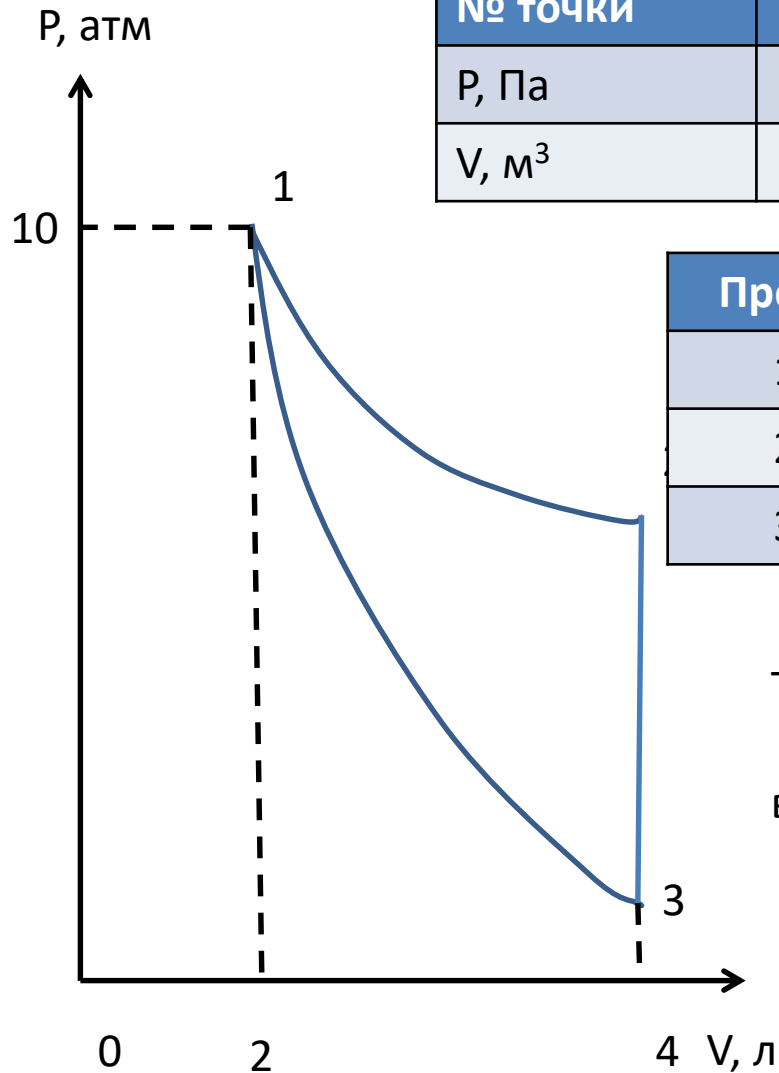
$$\eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{T_{\text{холодильника}}}{T_{\text{нагревателя}}}$$

В нашем случае нагреватель: процесс 1-2 (максим. Температура, холодильник: точка 3 (мин. Темпер)

$$\eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{T_{\text{хол}}}{T_{\text{нагр}}} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{P_3 V_3}{P_1 V_1} = 1 - \frac{3,8 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-3}}{10 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3}} = 0,24 = 24\%$$

Сравним КПД с максимальным

№ точки	1	2	3
P, Па	$10 \bullet 10^5$	$5 \bullet 10^5$	$3,8 \bullet 10^5$
V, м ³	$2 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$	$4 \bullet 10^{-3}$



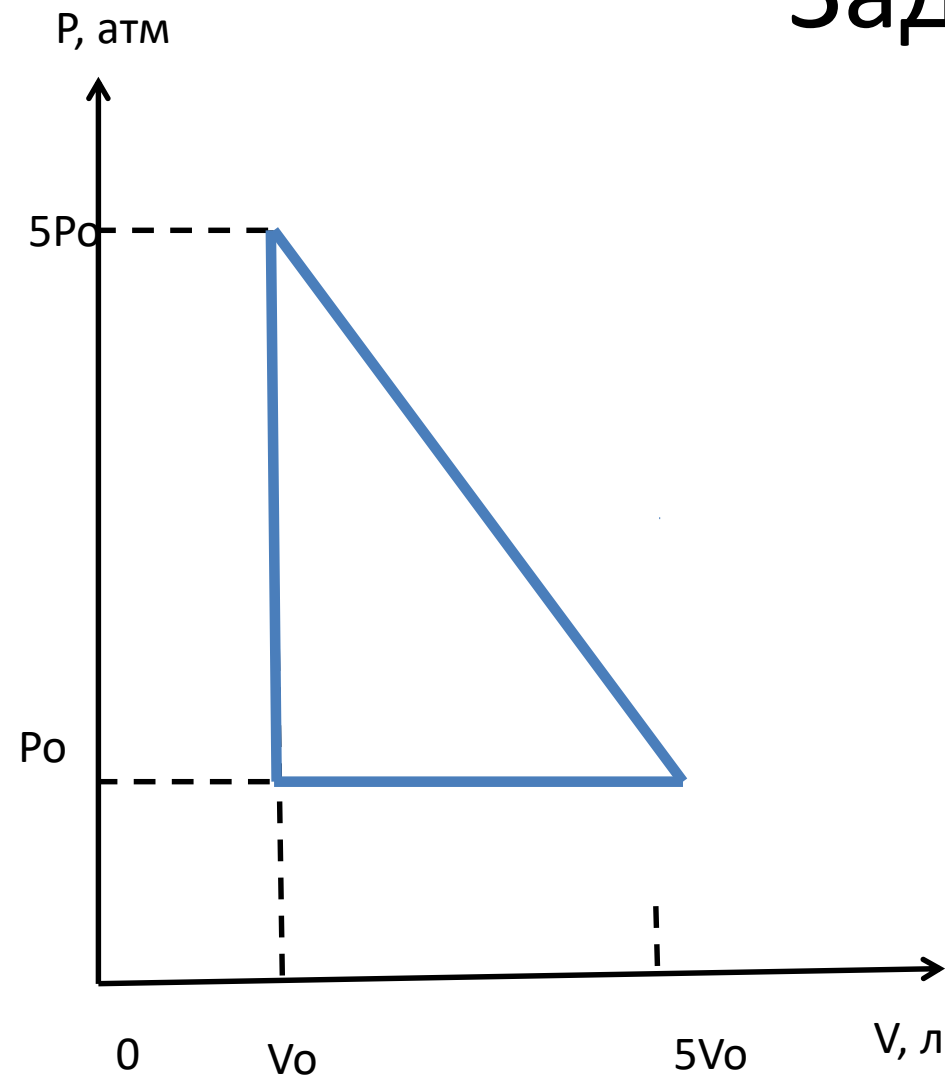
Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	1386	0	1386
2-3	0	-1200	-1200
3-1	-1200	1200	Q

Таким образом КПД нашей тепловой машины составляет $13/24 = 0,54 = 54\%$ от максимально возможного.

Задача, разобранная в классе

По просьбам телезрителей

Задача



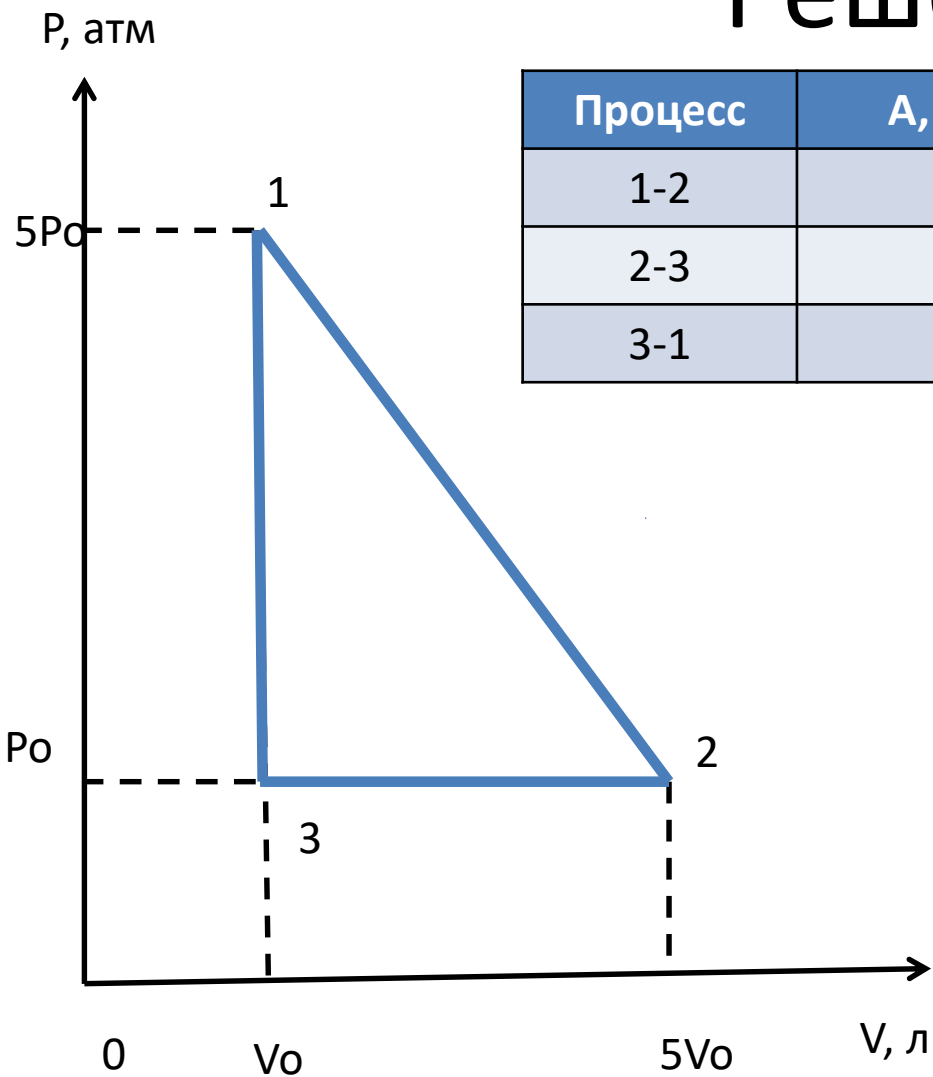
Найти КПД цикла, изображённого на рисунке. Рабочий газ – Аргон.

Найти, какой процент составляет КПД от максимально возможного

Решение

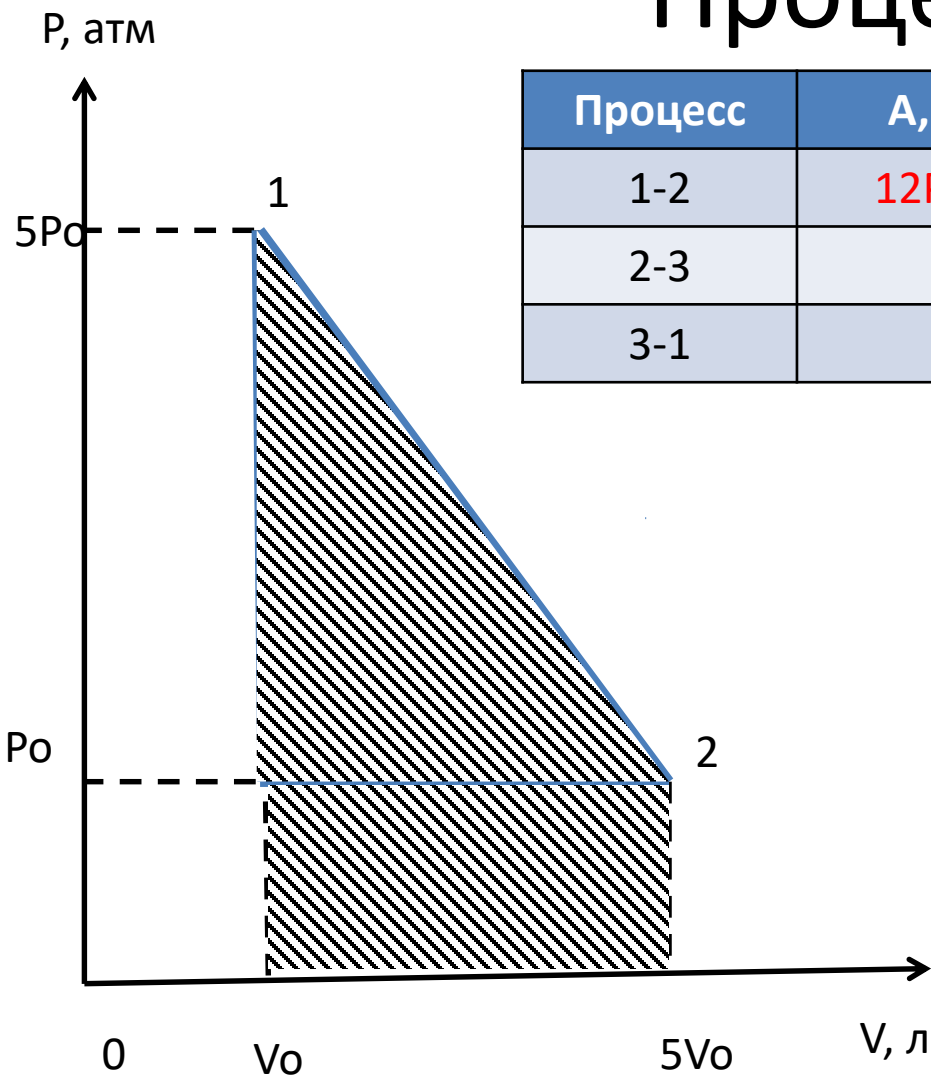
Процесс	A , Дж	ΔU , Дж	Q , Дж
1-2			
2-3			
3-1			

Заполняем таблицу



Процесс 1-2

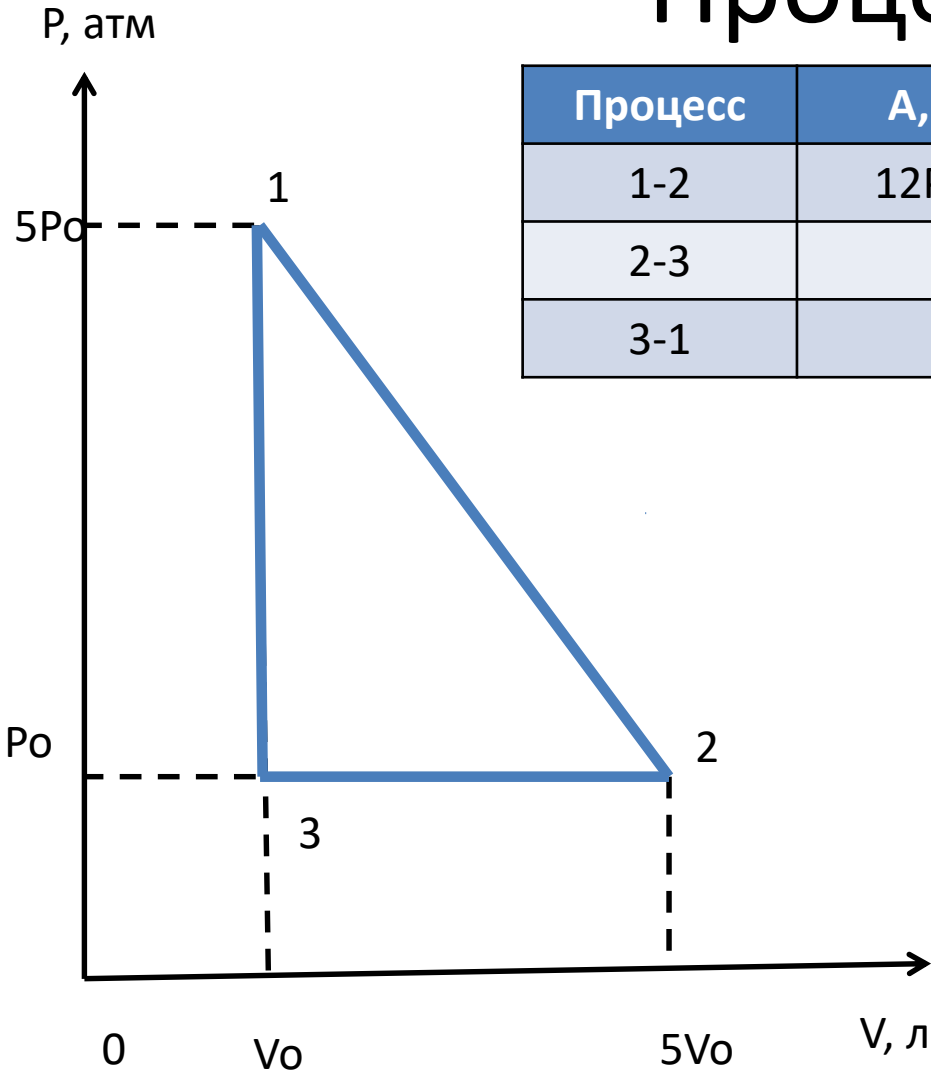
Процесс	А, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	12P ₀ V ₀		
2-3			
3-1			



Работу ищем как площадь под графиком процесса – площадь трапеции

$$A = \frac{5P_0 + P_0}{2} 4V_0 = 12P_0V_0$$

Процесс 1-2



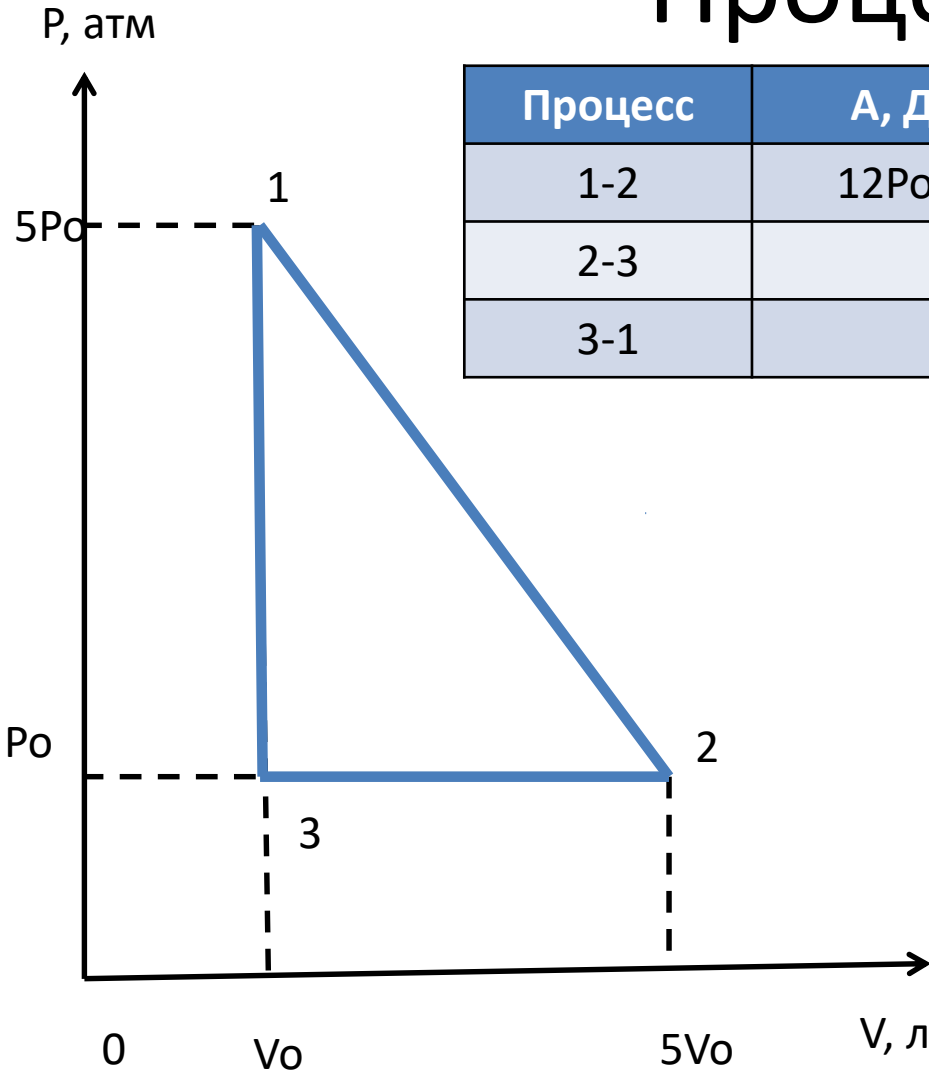
Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	$12P_oV_o$	0	
2-3			
3-1			

Аргон – одноатомный газ – 3 степени свободы

$$\Delta U = \frac{3}{2} \Delta(PV) =$$

$$= \frac{3}{2} (5V_oP_o - V_o5P_o) = 0$$

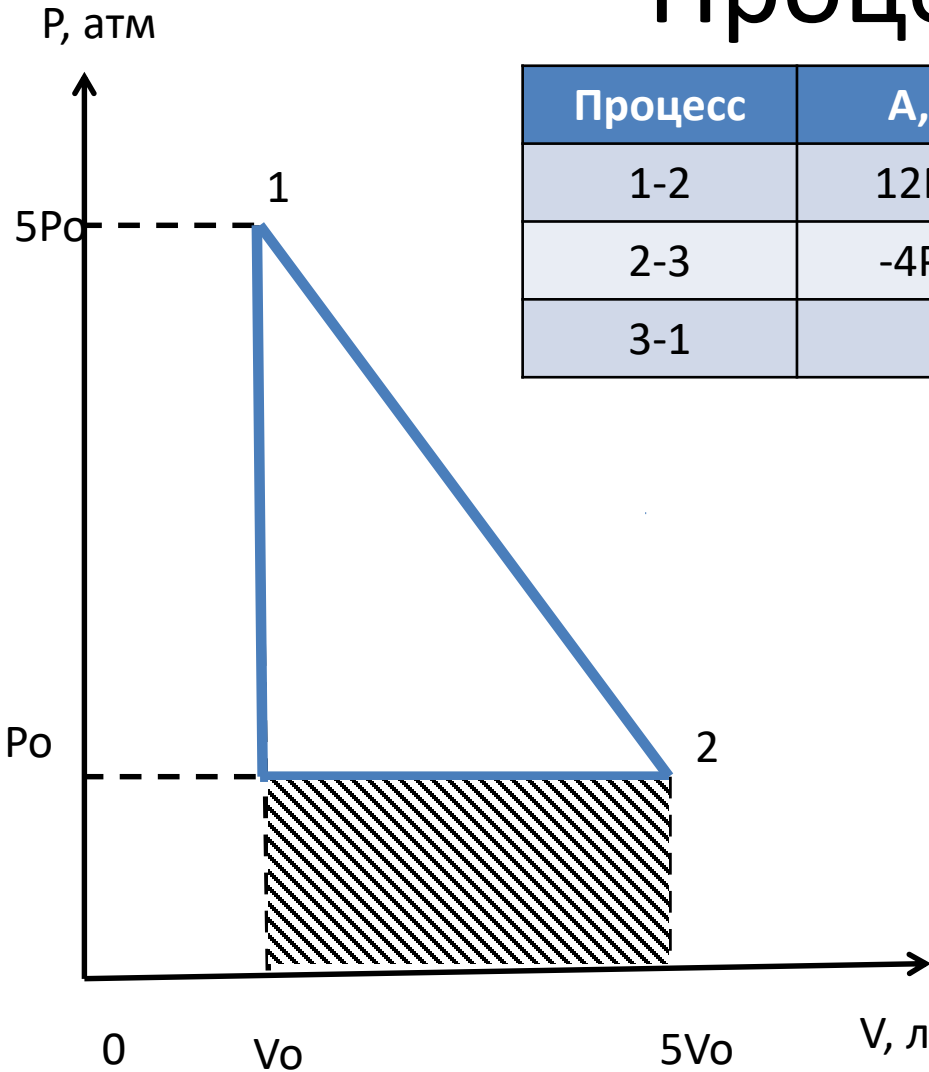
Процесс 1-2



Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	$12P_oV_o$	0	$12P_oV_o$
2-3			
3-1			

$$12P_oV_o + 0 = 12P_oV_o$$

Процесс 2-3



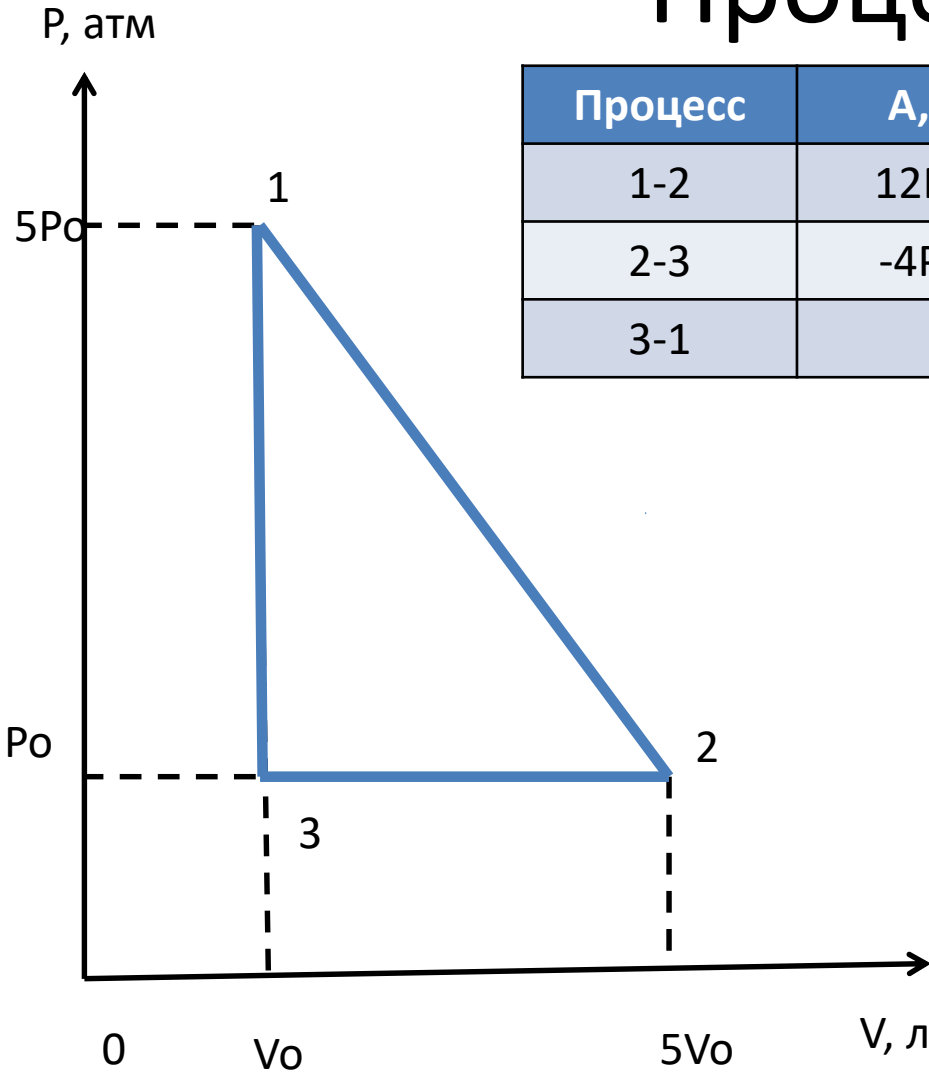
Процесс	$A, \text{ Дж}$	$\Delta U, \text{ Дж}$	$Q, \text{ Дж}$
1-2	$12P_0V_0$	0	$12P_0V_0$
2-3	$-4P_0V_0$		
3-1			

Работу ищем как площадь под графиком процесса – площадь прямоугольника, но со знаком «-», так как объём уменьшается

$$A = -P_0 4V_0 = -4P_0V_0$$

Процесс 2-3

Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	$12P_0V_0$	0	$12P_0V_0$
2-3	$-4P_0V_0$	$-6P_0V_0$	
3-1			



Аргон – одноатомный газ – 3 степени свободы

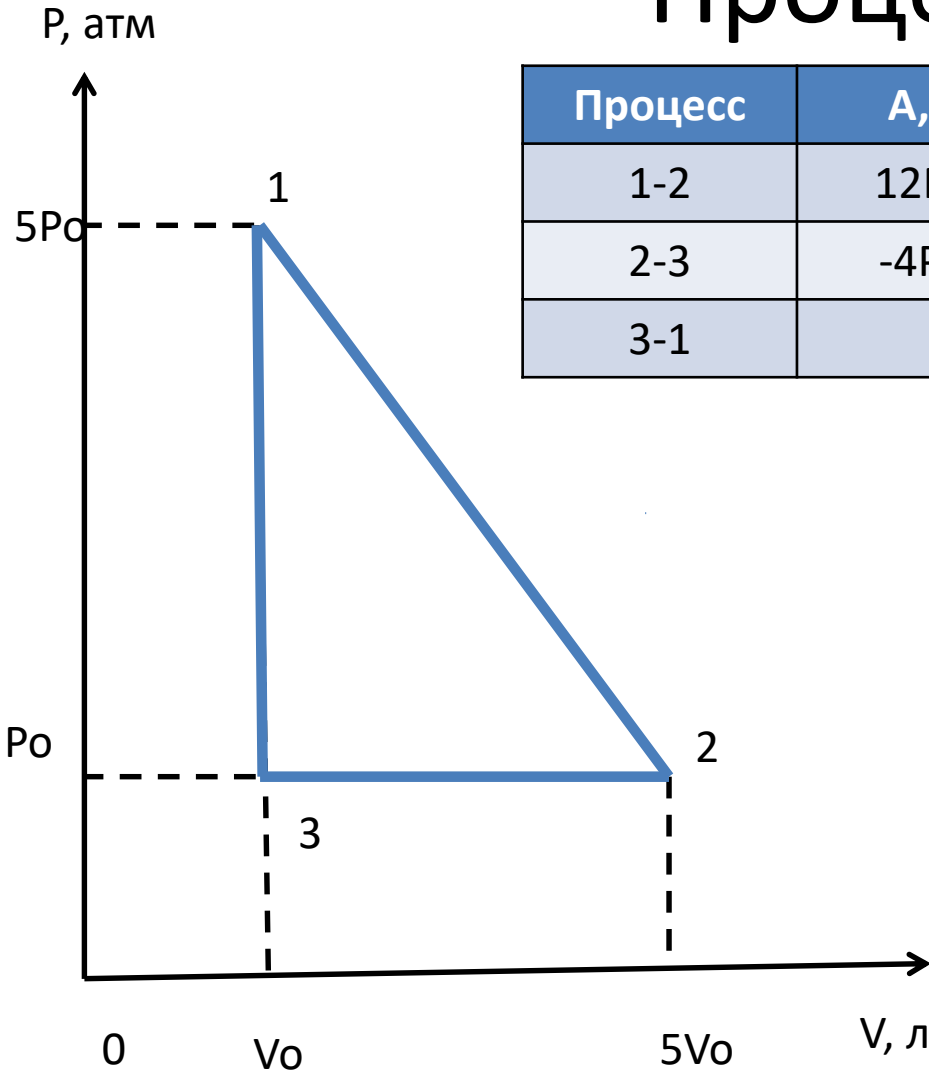
$$\Delta U = \frac{3}{2} \Delta(PV) =$$

$$= \frac{3}{2} (V_0 P_0 - 5V_0 P_0) = -6P_0V_0$$

Процесс 2-3

Процесс	А, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	$12P_0V_0$	0	$12P_0V_0$
2-3	$-4P_0V_0$	$-6P_0V_0$	$-10P_0V_0$
3-1			

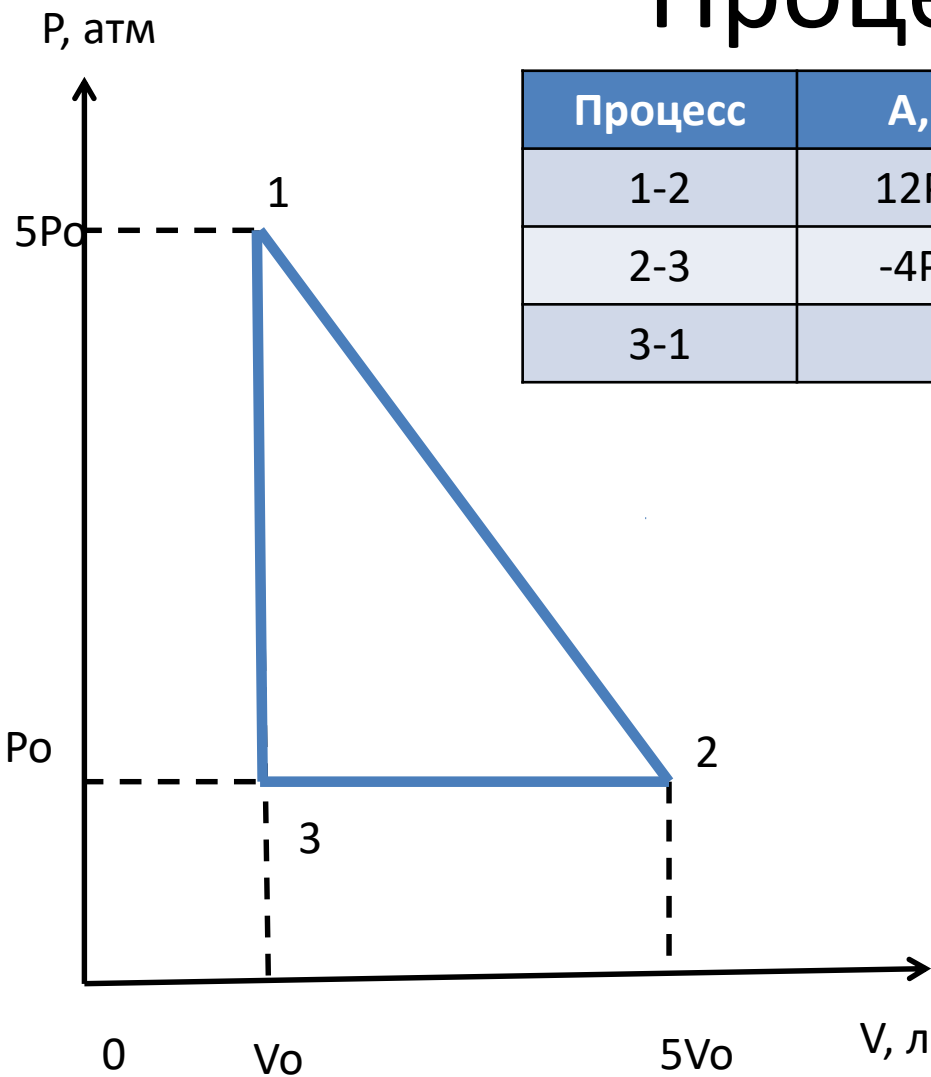
$$-4P_0V_0 - 6P_0V_0 = -10P_0V_0$$



Процесс 3-1

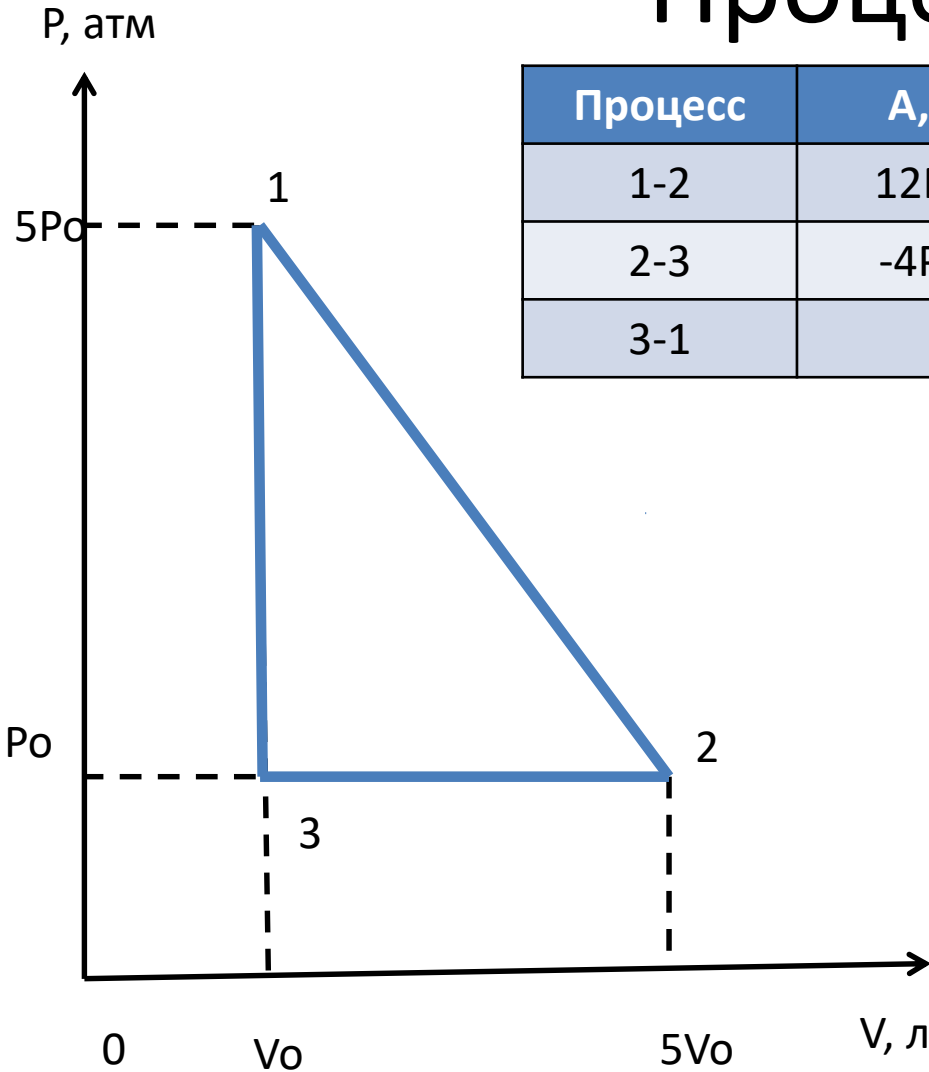
Процесс	A , Дж	ΔU , Дж	Q , Дж
1-2	$12P_0V_0$	0	$12P_0V_0$
2-3	$-4P_0V_0$	$-6P_0V_0$	$-10P_0V_0$
3-1	0		

$A=0$ (Изохорный процесс)



Процесс 2-3

Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	$12P_0V_0$	0	$12P_0V_0$
2-3	$-4P_0V_0$	$-6P_0V_0$	$-10P_0V_0$
3-1	0	$6P_0V_0$	

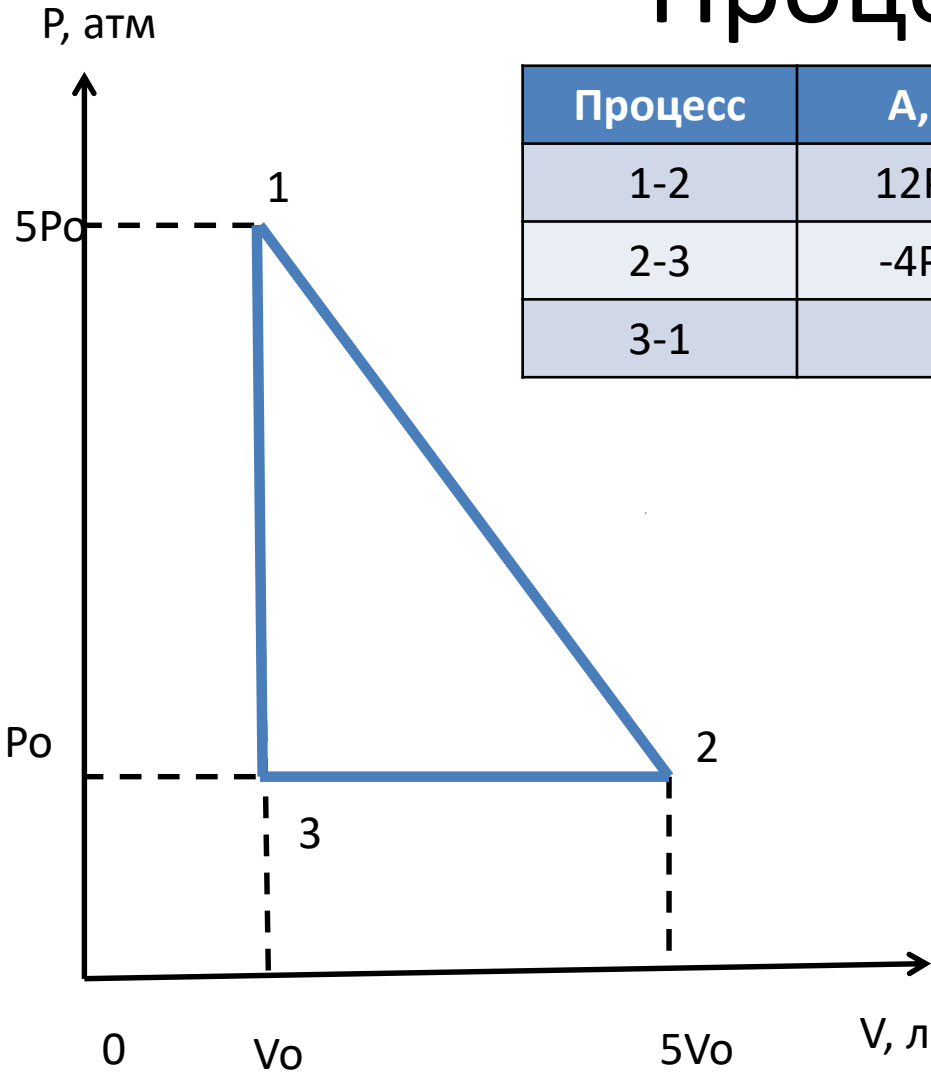


Аргон – одноатомный газ – 3 степени свободы

$$\Delta U = \frac{3}{2} \Delta(PV) =$$

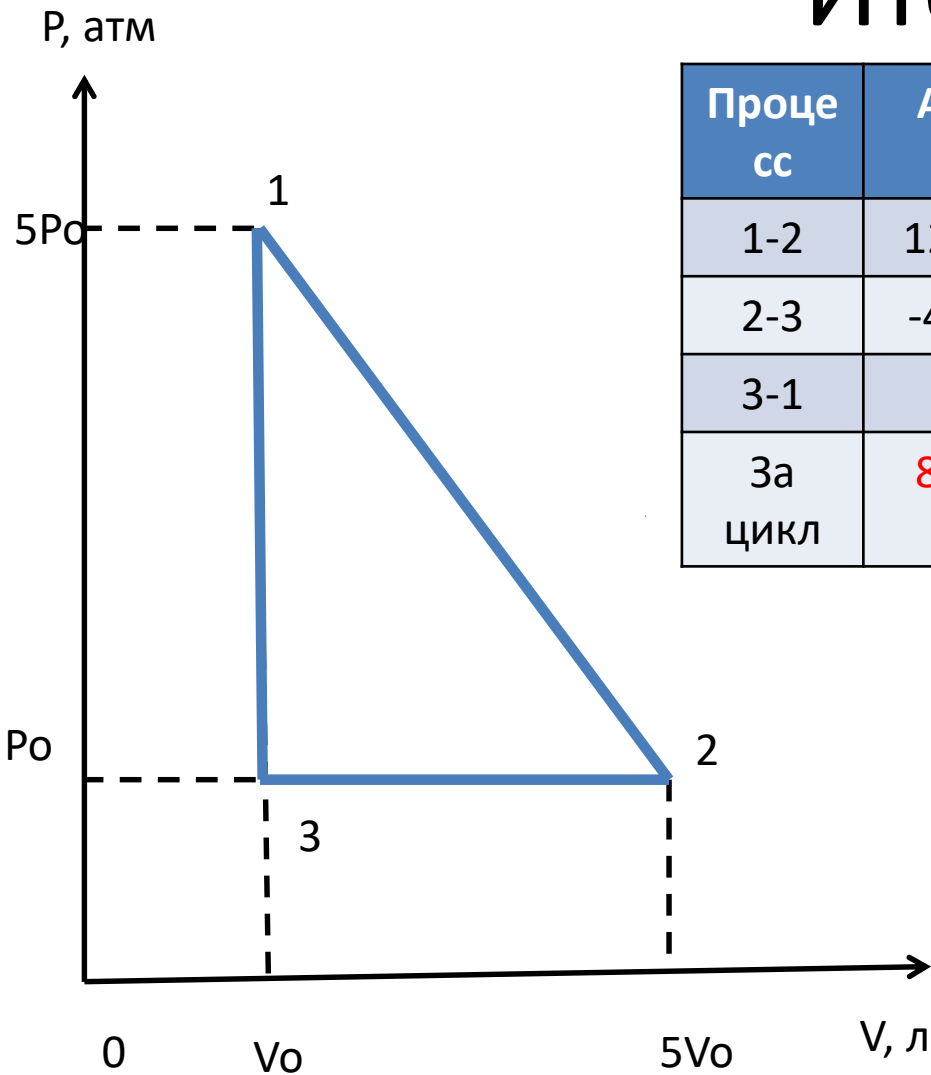
$$= \frac{3}{2} (V_0 5P_0 - V_0 P_0) = 6P_0V_0$$

Процесс 2-3



Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж
1-2	$12P_0V_0$	0	$12P_0V_0$
2-3	$-4P_0V_0$	$-6P_0V_0$	$-10P_0V_0$
3-1	0	$6P_0V_0$	$6P_0V_0$

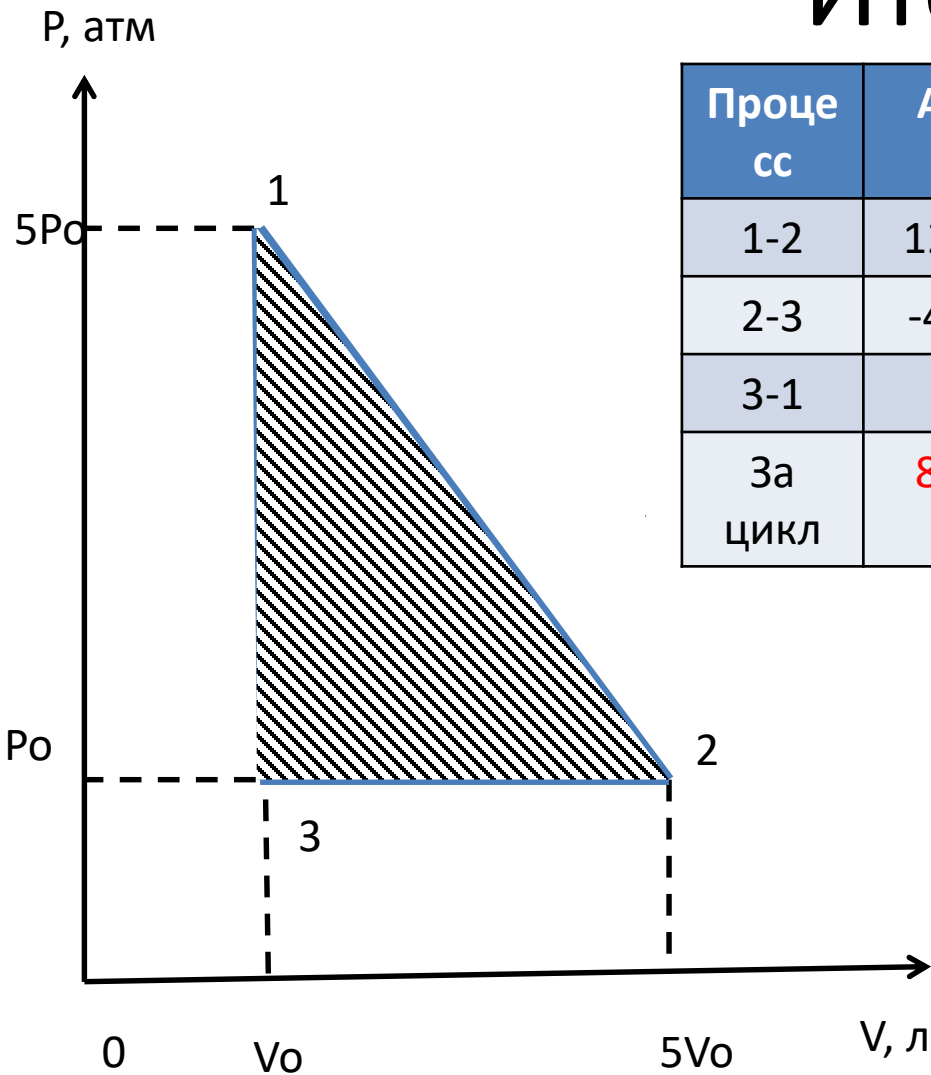
Итоги



Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж	Режим
1-2	$12P_0V_0$	0	$12P_0V_0$	Нагреватель
2-3	$-4P_0V_0$	$-6P_0V_0$	$-10P_0V_0$	Холодильник
3-1	0	$6P_0V_0$	$6P_0V_0$	Нагреватель
За цикл	$8P_0V_0$	0	$8P_0V_0$	Тепловая машина

$$Q_H = 12P_0V_0 + 6P_0V_0 = 18P_0V_0$$

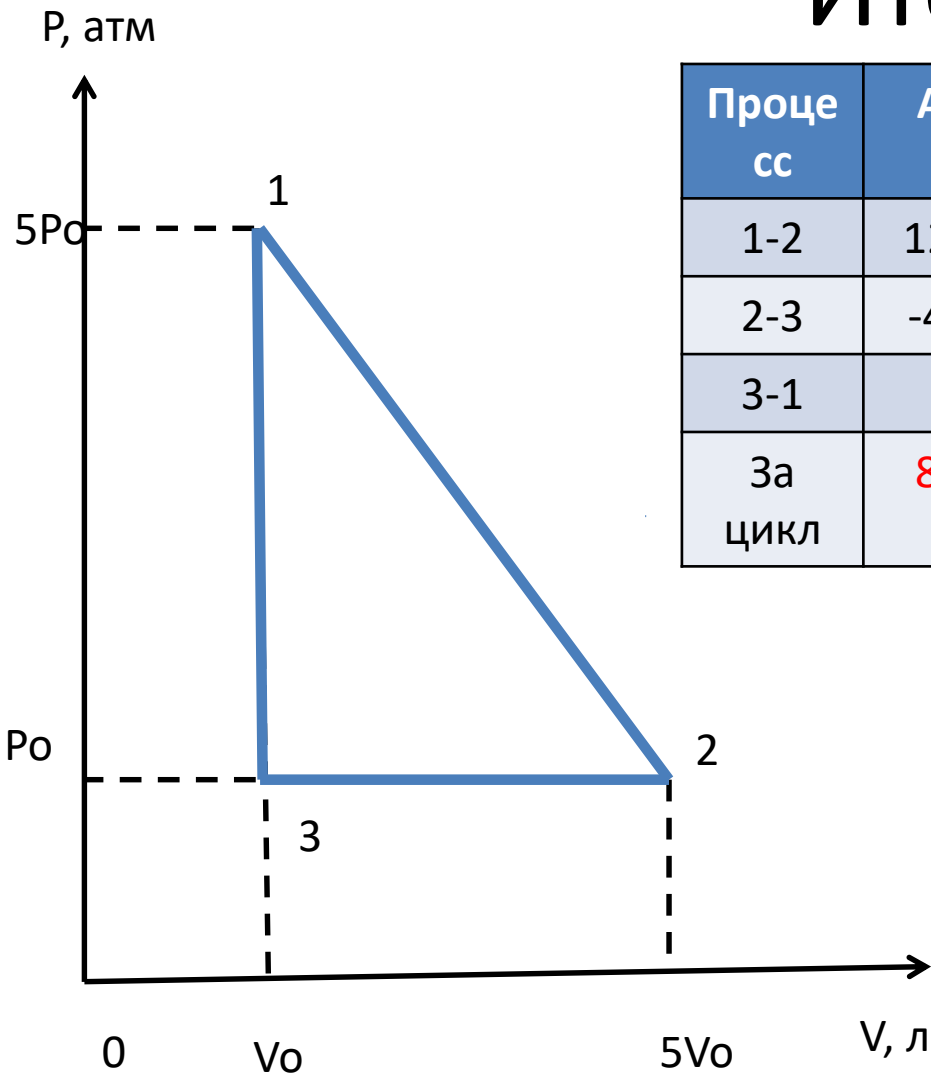
Итоги



Процесс	A, Дж	ΔU , Дж	Q, Дж	Режим
1-2	$12P_0V_0$	0	$12P_0V_0$	Нагреватель
2-3	$-4P_0V_0$	$-6P_0V_0$	$-10P_0V_0$	Холодильник
3-1	0	$6P_0V_0$	$6P_0V_0$	Нагреватель
За цикл	$8P_0V_0$	0	$8P_0V_0$	Тепловая машина

Работа цикл равна площади цикла
или по таблице:
 $A=8P_0V_0$

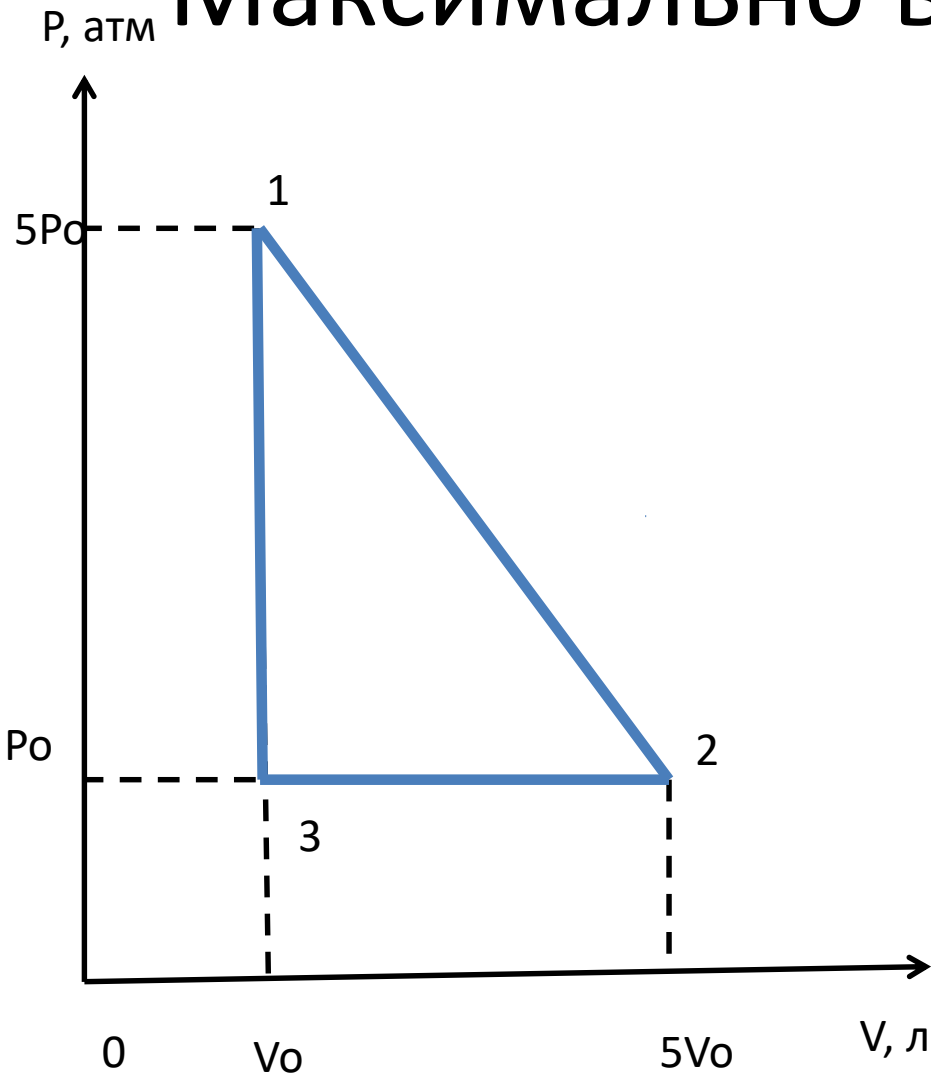
Итоги



Процесс	A, Дж	ΔU, Дж	Q, Дж	Режим
1-2	12P ₀ V ₀	0	12P ₀ V ₀	Нагреватель
2-3	-4P ₀ V ₀	-6P ₀ V ₀	-10P ₀ V ₀	Холодильник
3-1	0	6P ₀ V ₀	6P ₀ V ₀	Нагреватель
За цикл	8P ₀ V ₀	0	8P ₀ V ₀	Тепловая машина

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{8P_0V_0}{18P_0V_0} = \frac{4}{9}$$

Максимально возможный КПД

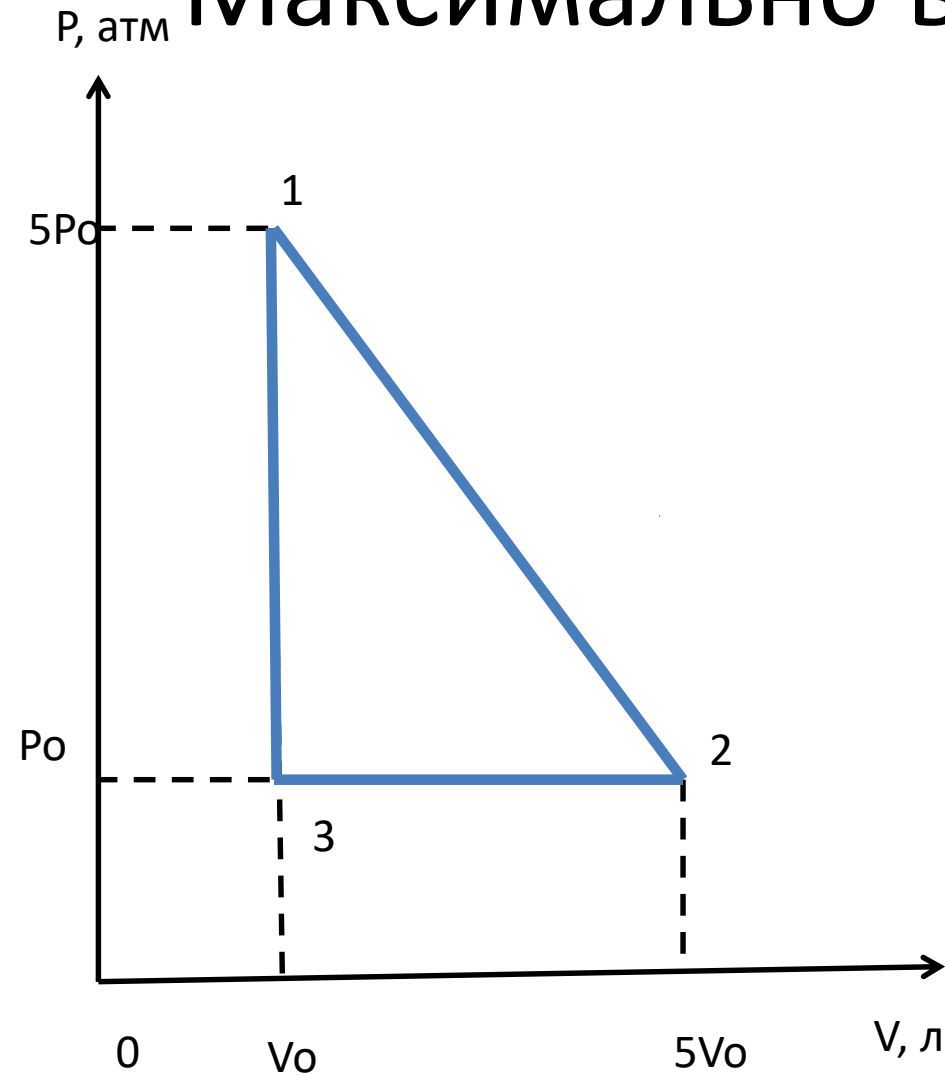


КПД Карно:

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{Х}}}{T_{\text{Н}}},$$

Где $T_{\text{Х}}$ и $T_{\text{Н}}$ –
наименьшая и
наибольшая
температуры

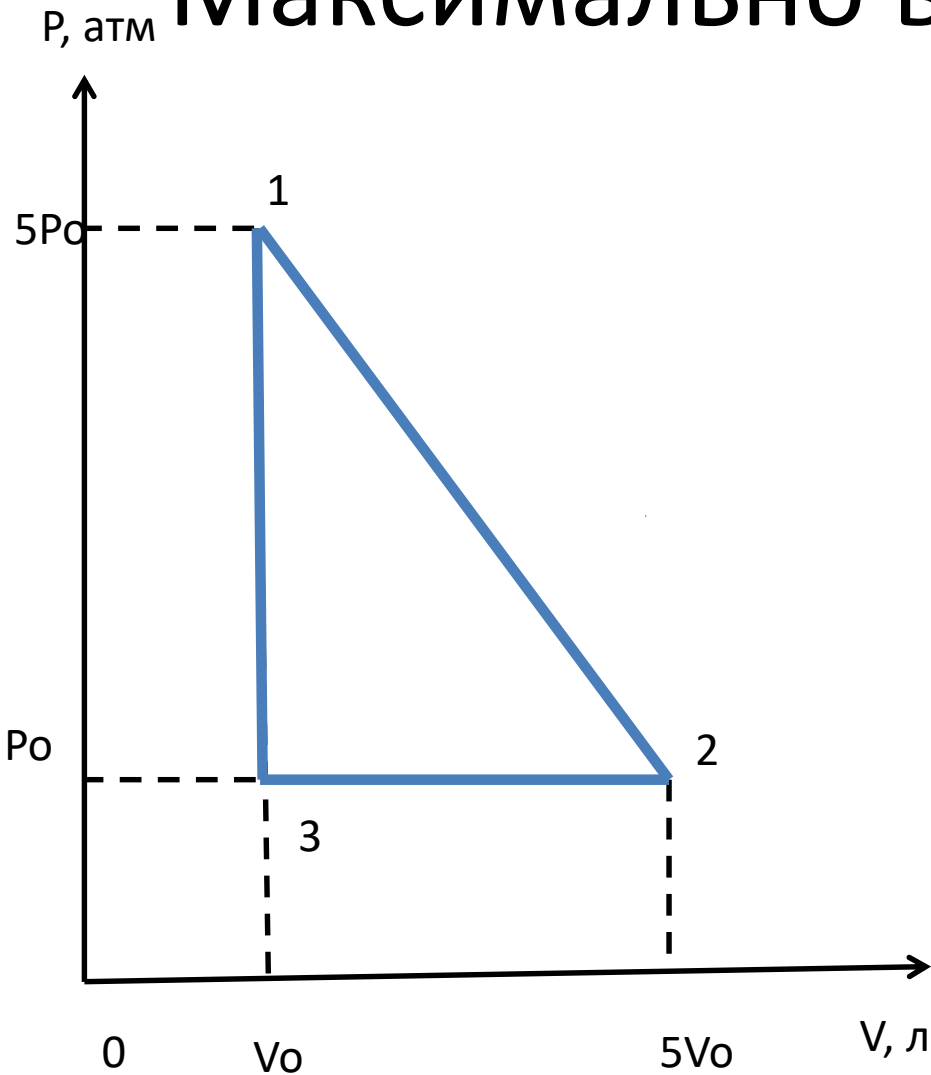
Максимально возможный КПД



Наименьшая
температура в точке 3

$$T_x = \frac{P_0 V_0}{\nu R},$$

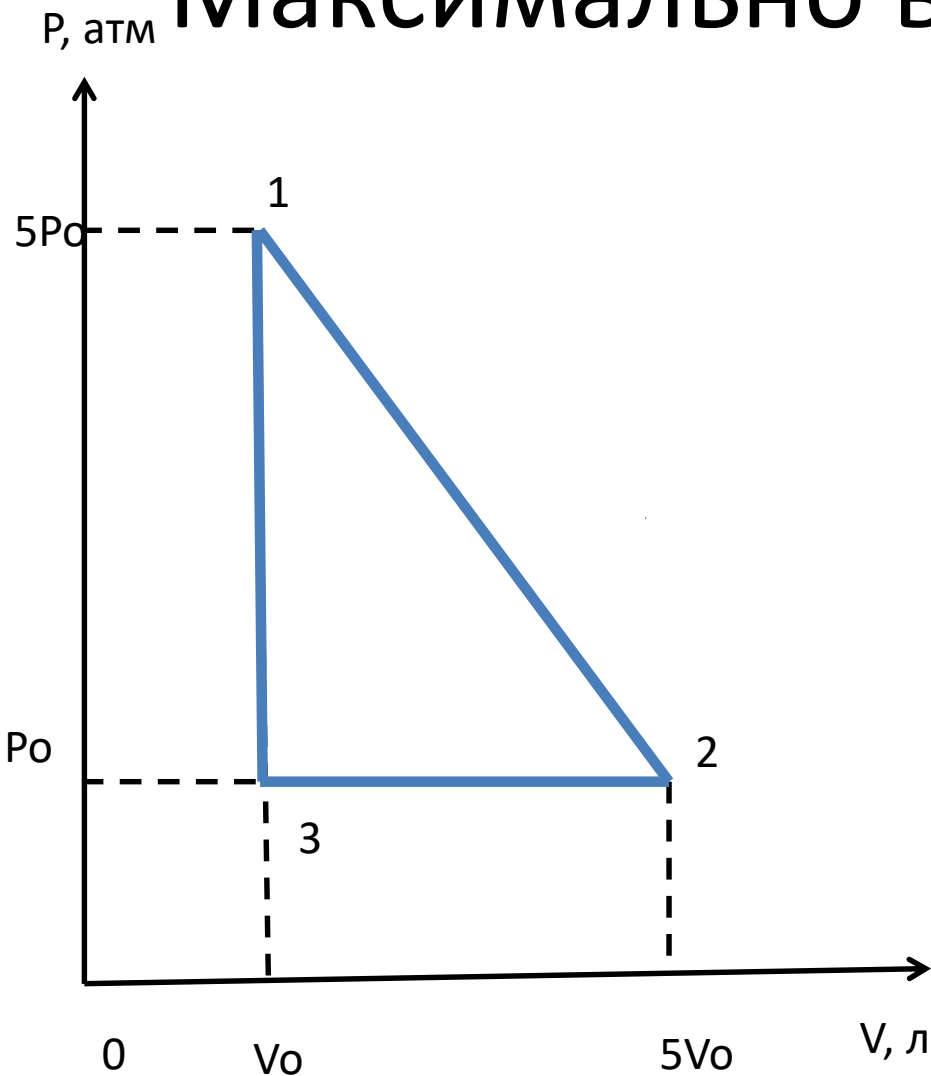
Максимально возможный КПД



Наибольшая
температура в
середине 1-2

$$T_x = \frac{3P_0 3V_0}{\nu R} = \frac{9P_0 V_0}{\nu R},$$

Максимально возможный КПД



КПД Карно:

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{Х}}}{T_{\text{Н}}},$$
$$\eta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Наш КПД ($4/9$)
составляет 50% от
максимально
ВОЗМОЖНОГО